Двоичные палиндромы и реверсивно-устойчивые последовательности

Георгий Гуляев

1 июля 2026 г.

Палиндром - это последовательность символов, не меняющаяся после преобразования реверса, то есть записи символов в обратном порядке следования. В нашем случае речь пойдет о натуральных числах-палиндромах в десятичной системе счисления, например, таких как

$$5, 33, 131, 1221, 12321, 705919507, ...$$

Очевидно, такие числа не могут оканчиваться на ноль. Однозначные числа и числа, в десятичной записи которых используется только одна цифра, сразу являются палиндромами.

Для натурального числа n через $rev(n)$ - обозначим функцию реверса, то есть натуральное число, в десятичной записи которого цифры следуют в обратном порядке по отношению к n.

Пример реализации этой функции на языке программирования Julia:

```
rev(n) = parse(BigInt, join(digits(n)))
rev(1300456709) = 9076540031, rev(12500) = 521
```

Определение 1. Числом - палиндромом называется натуральное число n, для которого выполняется условие $rev(n) = n$.

1. Двоичные палиндромы

Рассмотрим теперь все палиндромы, десятичная запись которых содержит только две цифры 1 и 0.

```
P = {1, 11, 101, 111. 1001, 1111, 10001, 10101, 11011, 11111,
100001, 101101, 110011, 111111, 1000001, 1001001, 1010101,
1011101, 1100011, 1101011, 1110111, 1111111, 10000001, 10011001,
10100101, 10111101, 11000011, 11011011, 11100111, 11111111,
100000001, 100010001, 100101001,...}
```

Будем называть такие палиндромы, для краткости, **двоичными палиндромами**, хотя рассматривать их будем в десятичной системе счисления.

Заметим, что некоторые из этих чисел, при умножении на **91**, сохраняют свойство быть двоичным палиндромом, то есть они остаются палиндромами и в своей десятичной записи по-прежнему содержат только 0 и 1, например:

$$111 \cdot 91 = 10101, 110011 \cdot 91 = 10011001, 1100011 \cdot 91 = 100101001$$

С другой стороны, есть много примеров, когда такое умножение дает иной результат:

$$101 \cdot 91 = 9191, 11011 \cdot 91 = 1002001, 1011101 \cdot 91 = 92010191$$

Определение 2. Будем называть двоичный палиндром k-стойким, если при умножении на натуральное число k, он остается двоичным палиндромом.

Количество и процент k-стойких из 20397 первых двоичных палиндромов, для $k \leq 10001$, приведено в таблице:

k	всего	%
1	20397	100
11	1362	6.68
91	985	4.82
101	1218	5.97
111	344	1.69
1001	1430	7.01
1111	153	0.75
9091	688	3.37
9191	77	0.38
9901	1085	5.32
10001	1411	6.92

Для всех остальных $1 \leq k \leq 10001$ не нашлось ни одного k-стойкого в списке из 20397 первых двоичных палиндромов. Отметим, что в таблице много случаев, когда сами числа k - тоже палиндромы. Таковы все, кроме четырех: $91, 9091, 9191, 9901$.

Выберем теперь все 91 - стойкие двоичные палиндромы.

```
P91 = {11, 111, 1111, 11111, 110011, 111111, 1100011, 1111111,
11000011, 11100111, 11111111, 110000011, 111000111, 111111111,
1100000011, 1100110011, 1110000111, 1111001111, 1111111111,
11000000011, 11001110011, 11100000111, 11110001111, 11111111111,
110000000011, 110001100011,...}
```

Мы получили известную последовательность, которая в энциклопедии цифровых последовательностей [1] определяется, как палиндромы из нулей и единиц, не содержащие отдельных единиц или нулей.

Теорема 1. Двоичный палиндром является 91-стойким тогда и только тогда, когда в его десятичной записи единицы и нули встречаются группами не менее двух нулей и не менее двух единиц подряд.

Доказательство.

Пусть n - двоичный палиндром, тогда $n \cdot 91 = n \cdot 9 \cdot 10 + n$. Первое слагаемое $n \cdot 9 \cdot 10$ получается из n заменой всех единиц девятками (нули останутся на месте) и добавлением нуля в конец, второе слагаемое - сам палиндром n.

При сложении столбиком, числа с девятками и единицами будут сдвинуты относительно друг друга на один разряд:

```
 9x..90
+ 1...1
 ------
100...1
```

Предположим, что палиндром n 91-стойкий, то есть результат умножения $n \cdot 91$ - двоичный палиндром. Тогда x = 9, то есть в начале и в конце n должно быть, по крайней мере, две единицы подряд.

Если где-то внутри десятичной записи n был бы один ноль среди единиц или одна единица среди нулей, то, с учетом сдвига на один разряд в столбике для сложения, это бы выглядело так;

```
...909...   ...090...
...010...   ...101...
```

В первом случае в десятичной записи числа $n \cdot 91$ появилась бы девятка или двойка, а во втором случае девятка и это противоречит нашему предположению, что палиндром n 91-стойкий.

Обратно, пусть n - двоичный палиндром и в его десятичной записи нет одиночных нулей и единиц. Покажем, что $n \cdot 91$ - двоичный палиндром. Сложение $n \cdot 90$ и n в общем виде теперь выглядит так:

```
 99...990
+ 11...11
 --------
100....01
```

На концах суммы будут единицы. Точнее, в начале 10, а в конце 01. Еще точнее, и в начале и в конце в столбике будет одна и та же структура, типа:

```
  099999990
+   1111111
   --------
  101111101
```

То есть, первое слагаемое: некоторое число $m > 1$ девяток с нулями на концах, второе - такое же число m единиц. Лидирующий ноль в начало мы добавили для симметрии.

Легко видеть, что в сумме здесь мы всегда получим двоичный палиндром какое бы число $m > 1$ мы не взяли. Теперь весь столбик для сложения можно разбить на подобные независимые части и на возможные части, которые будут состоять из одних нулей:

```
  00...00
+ 00...00
  -------
  00...00
```

Результаты сложения каждой части - палиндромы из нулей и единиц и, из-за палиндромной симметрии $n \cdot 90$ и n, соблюдается центральная симметрия различных частей. Поэтому вся сумма, составленная конкатенацией из таких частичных сумм, будет палиндромом из нулей и единиц. Что и требовалось доказать.

2. Реверсивно-устойчивые последовательности

Определение 3. Последовательность натуральных чисел $S_n = \{a_n\}, n \in \mathbb{N}$, для которых отношение $\frac{rev(a_n)}{a_n}$ - постоянно и не зависит от n назовем реверсивно-устойчивой последовательностью.

Множество двоичных палиндромов $P91$ может быть использовано для порождения реверсивно-устойчивых последовательностей.

Например, если все члены $P91$ умножить на $k = 99$, то мы получим последовательность, рассматриваемую в работе [2], для которой $\frac{rev(a_n)}{a_n} = 9, \forall n \in \mathbb{N}$:

1089, 10989, 109989, 1099989, 10891089, 10999989, 108901089, 109999989, 1089001089, 1098910989, 1099999989, 10890001089, 10989010989, 10999999989, 108900001089, 108910891089, 109890010989, 109989109989, 109999999989, 1089000001089 1089109891089, 1098900010989, 1099890109989, 1099999999989, 10890000001089, 10890108901089, 10891099891089,...

А если все члены $P91$ умножить на $k = 198 = 99 \cdot 2$, то мы получим последовательность, для которой $\frac{rev(a_n)}{a_n} = 4\ \forall n \in \mathbb{N}$ (смотри [3] и [4]):

2178, 21978, 219978, 2199978, 21782178, 21999978, 217802178, 219999978, 2178002178, 2197821978, 2199999978, 21780002178, 21978021978, 21999999978, 217800002178, 217821782178, 219780021978, 219978219978, 219999999978, 2178000002178, 2178219782178, 2197800021978, 2199780219978, 2199999999978, 21780000002178, 21780217802178, 21782199782178,...

В работе [5] при исследовании последовательностей, порожденных функцией $f(n) = |rev(n) - n|$, используемой взамен функции Лишрела $f(n) = rev(n) + n$, также была обнаружена последняя последовательность и, кроме нее, еще одна:

6534, 65934, 659934, 6599934, 65346534, 65999934, 653406534, 659999934, 6534006534, 6593465934. 6599999934. 65340006534, 65934065934, 65999999934, 653400006534, 653465346534, 659340065934, 659934659934, 659999999934, 6534000006534, 6534659346534, 6593400065934, 6599340659934, 6599999999934 65340000006534, 65340653406534, 65346599346534,...

Она также получается из $P91$ умножением всех членов на $k = 594 = 99 \cdot 6$. И для нее отношение $\frac{rev(a_n)}{a_n}$ тоже постоянно $\forall n \in \mathbb{N}$, правда теперь оно уже не целое, а рациональное: $\frac{rev(a_n)}{a_n} = \frac{2}{3}$.

Все эти последовательности выглядят одинаково. В их десятичной записи присутствует определенная симметрия, наследуемая от умножения на $P91$. Внутрь вставляемые цифры - девятки, разделители групп - нули.

С учетом происхождения от $P91$, подобные последовательности можно задавать первым членом $S_{a_1}, a_1 = 11 \cdot k, k = 99 \cdot m, m \in [1, 9]$.

Можно определить операции над ними, как над множествами, подразумевая применение операции к каждому элементу последовательности. А также, отношение равенства, как равенство всех соответствующих членов последовательности. Тогда,

$$rev(S_{1089}) = S_{9801} = 9 \cdot S_{1089}$$

$$rev(S_{2178}) = S_{8712} = 4 \cdot S_{2178}$$

$$rev(S_{6534}) = S_{4356} = 2 \cdot S_{2178}$$

$$S_{2178} = 2 \cdot S_{1089}, S_{6534} = 3 \cdot S_{2178}, S_{6534} = 2 \cdot S_{3276}$$

$$rev(S_{2178})^2 + rev(S_{6534})^2 = 2 \cdot (S_{2178}^2 + (S_{6534}^2)$$

и так далее. Кроме этих девяти последовательностей существуют множество других, получаемых умножением всех элементов $P91$ на некоторый коэффициент $k \in \mathbb{N}$ и сохраняющих, при этом, постоянство $\frac{rev(a_n)}{a_n}$.

Например, $S_{3751} = 341 \cdot P91$:

```
3751, 37851, 378851, 3788851, 37513751, 37888851, 375103751,
378888851, 3751003751, 3785137851,...
```

Здесь $\frac{rev(a_n)}{a_n} = \frac{13}{31}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, разделитель 0 и вставляемая цифра 8. Кроме того,

$$rev(S_{3751}) = rev(341 \cdot P91) = S_{1573} = 143 \cdot P91 = rev(341) \cdot P91$$

Еще один пример $S_{3025} = 275 \cdot P91$:

```
3025, 30525, 305525, 3055525, 30253025, 30555525, 302503025,
305555525, 3025003025, 3052530525,...
```

В этом случае, $\frac{rev(a_n)}{a_n} = \frac{43}{25}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, разделитель 0 и вставляемая цифра 5. Кроме того,

$$rev(S_{3025}) = rev(275 \cdot P91) = S_{5203} = 473 \cdot P91 \neq rev(275) \cdot P91$$

Также бывают исключения - последовательности вроде бы внешне сохраняют симметрию, унаследованную от умножения на $P91$, но $\frac{rev(a_n)}{a_n}$ у них меняется в зависимости от n, например, $S_{1815} = 165 \cdot P91$:

```
1815, 18315, 183315, 1833315, 18151815, 18333315, 181501815,
183333315, 1815001815, 1831518315,...
```

Здесь разделитель 0 и вставляемая цифра 3, но $\frac{rev(1815)}{1815} = \frac{157}{55}, \frac{rev(18315)}{18315} = \frac{519}{185}, \frac{rev(183315)}{183315} = \frac{15557}{5555}, \ldots$. То есть, $\frac{rev(a_n)}{a_n} \neq const$ и последовательность не является реверсивно-устойчивой.

Во всех приведенных выше примерах реверсивно-устойчивых последовательностей можно заметить интересную особенность.

Если первый четырехзначный элемент последовательности разбить пополам на два двузначных числа, то сумма цифр единиц будет равна сумме цифр десятков этих чисел и именно эта сумма равна вставляемой цифре. Например,

```
1089: 1+8 = 0+9 = 9,
2178: 2+7 = 1+8 = 9,
6534: 6+3 = 5+4 = 9,
3751: 3+5 = 7+1 = 8
3025: 3+2 = 0+5 = 5
```

А для последнего примера не рекурсивно-устойчивой последовательности это свойство уже не выполняется $(1815 : 1 + 1 \neq 8 + 5)$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$ - фиксировано. Тогда, для последовательности $S_n = k \cdot P91$ ее реверсивная устойчивость, по определению, эквивалентна выполнению равенства:

$$\frac{rev(k \cdot x)}{k \cdot x} = \frac{r}{s} : \ r, s \in \mathbb{N}, gcd(r, s) = 1, \forall x \in P91 \qquad (1)$$

Теорема 2. Для фиксированного натурального числа k выражение $\frac{rev(k \cdot x)}{k \cdot x} = const \ \forall x \in P91$ тогда и только тогда, когда $rev(k \cdot x)$ делится на $x \ \forall x \in P91$ и, при этом, $\frac{rev(k \cdot x)}{x} = c$ ($c \in \mathbb{N}$, зависит только от k и не зависит от $x \in P91$). Другими словами, условие (1) равносильно:

$$\frac{rev(k \cdot x)}{x} = c : \ c \in \mathbb{N}, \forall x \in P91 \qquad (2)$$

Доказательство. Если $\frac{rev(k \cdot x)}{x} = c$ - не зависит от $x \in P91$, то $\frac{rev(k \cdot x)}{k \cdot x} = \frac{c}{k} = const$. Обратно, если $\frac{rev(k \cdot x)}{k \cdot x} = \frac{r}{s} = \frac{r \cdot k}{s \cdot k} = \frac{c}{k} \ \forall x \in P91$, где $gcd(r, s) = 1$, то есть r и s - взаимно простые, $c = \frac{r \cdot k}{s}$. Теперь, если мы докажем, что c - некоторая целая константа, то $\frac{rev(k \cdot x)}{x} = c$ - не зависит от $x \in P91$ и теорема будет доказана.

Нам осталось показать, что k делится на s. Если $s = 1$, то все доказано. Пусть $s > 1$. Из равенства $\frac{rev(k \cdot x)}{k \cdot x} = \frac{r}{s}$ и несократимости дроби $\frac{r}{s}$ следует, что $k \cdot x$ делится на s $\forall x \in P91$. То есть, если k не делится на s, то все числа $P91$ должны делиться на s. Но это невозможно, например, 11 делится только на 11, а 111 - только на $3, 37$ и 111.

Теореиа доказана.

Теорема 3. Обозначим через d_x - наибольший общий делитель чисел $k \cdot x$ и $rev(k \cdot x)$, то есть $d_x = gcd(k \cdot x, rev(k \cdot x))$. Тогда, при фиксированном k, условие (1) равносильно:

$$\frac{rev(k \cdot x)}{d_x} = r, \ \frac{k \cdot x}{d_x} = s \ \forall x \in P91 \tag{3}$$

Доказательство. По теореме 2 условие (1) равносильно (2). То есть, $\frac{rev(k \cdot x)}{x} = c : c \in \mathbb{N}, \forall x \in P91 \Leftrightarrow d_x = gcd(k \cdot x, rev(k \cdot x)) = gcd(k \cdot x, \ c \cdot x)) = x \cdot gcd(k, c)$. Отсюда, $\frac{rev(k \cdot x)}{d_x} = \frac{c \cdot x}{x \cdot gcd(k,c)} = \frac{c}{gcd(k,c)} = c_1$ и $\frac{k \cdot x}{d_x} = \frac{k \cdot x}{x \cdot gcd(k,c)} = \frac{k}{gcd(k,c)} = k_1$.

Очевидно, $gcd(c_1, k_1) = 1, \frac{rev(k \cdot x)}{k \cdot x} = \frac{c_1}{k_1} = \frac{r}{s}$, откуда $c_1 = r, k_1 = s$. Таким образом, из (2) следует (3). Обратное, (3) $\Rightarrow$ (1), очевидно. Теорема доказана.

Через $d(S_n)$ обозначим последовательность, состоящую из наибольших общих делителей чисел a_n и $rev(a_n)$, $\forall a_n \in S_n$.

Теорема 4. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Последовательность $S_n = k \cdot P91$ тогда и только тогда будет реверсивно-устойчивой, когда существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что последовательность $d(S_n) = m \cdot P91$.

Доказательство. Пусть S_n - реверсивно-устойчива, тогда $\frac{rev(k \cdot x)}{k \cdot x} = \frac{r}{s}$ (несократимая дробь, либо $s = 1$). С другой стороны, по теореме 2, $\frac{rev(k \cdot x)}{x} = c$ - целое. Отсюда, $\frac{c}{k} = \frac{r}{s}$. В силу условия $gcd(r, s) = 1$, найдется число $m \in \mathbb{N}$ такое, что $c = m \cdot r$ и $k = m \cdot s$.

Далее, $s \cdot rev(k \cdot x) = r \cdot k \cdot x$ и $gcd(k \cdot x, rev(k \cdot x)) = \frac{k}{s} \cdot x = m \cdot x \ \forall x \in P91$. Таким образом, $d(S_n) = m \cdot P91$.

Обратно, пусть $d(S_n) = m \cdot P91 \Leftrightarrow \forall x \in P91, gcd(k \cdot x, rev(k \cdot x)) = m \cdot x$. Отсюда следует, что $k \cdot x$ делится на $m \cdot x$, то есть k делится на m и $rev(k \cdot x)$ тоже делится на $m \cdot x$. Пусть $k = m \cdot s$, тогда существует r такое, что $rev(m \cdot s \cdot x) = m \cdot r \cdot x$, где $r, s \in \mathbb{N}$, $gcd(r, s) = 1$ и, следовательно, $\frac{rev(k \cdot x)}{k \cdot x} = \frac{r}{s}$.

Осталось показать, что число r для данного k постоянно и не зависит от x. Строго доказать это можно, например, описанным далее способом (приведу лишь идею, без деталей).

Можно взять любые два значения $x_1, x_2 \in P91$ и сконструировать новое значение $y = x_1|000...000|x_2$ при помощи конкатенации x_1, x_2 и большого количества нулей, так чтобы операции умножения y на любые заранее заданные числа проводились над x_1 и x_2 в нем независимо и не смешивались.

При этих условиях, $y \in P91, r(x_1) = r(y)$ и $r(x_2) = r(y) \Rightarrow r(x_1) = r(x_2)$.

Проиллюстрируем доказанные теоремы на приведенных выше примерах:

1. $S_{1089} = 99 \cdot P91, \frac{rev(99 \cdot x)}{x} = 891, gcd(S_{1089}, S_{9801}) = S_{1089} = 99 \cdot P91$.

2. $S_{2178} = 198 \cdot P91, \frac{rev(198 \cdot x)}{x} = 792, gcd(S_{2178}, S_{8712}) = S_{2178} = 198 \cdot P91$.

3. $S_{3751} = 341 \cdot P91, \frac{rev(341 \cdot x)}{x} = 143, gcd(S_{3751}, S_{1573}) = S_{121} = 11 \cdot P91$.

4. $S_{3025} = 275 \cdot P91, \frac{rev(275 \cdot x)}{x} = 473, gcd(S_{3025}, S_{5203}) = S_{121} = 11 \cdot P91$.

5. $S_{1815} = 165 \cdot P91, \frac{rev(165 \cdot x)}{x} \neq const, \forall m \in \mathbb{N} : gcd(S_{1815}, S_{5181}) \neq m \cdot P91$.

Из теоремы 2 можно следать вывод, что коэффициенты k, приводящие к реверсивно-устойчивым последовательностям $S_n = k \cdot P91$, появляются парами $(k_1, k_2) : rev(k_1 \cdot x) = k_2 \cdot x,\ rev(k_2 \cdot x) = k_1 \cdot x,\ \forall x \in P91$.

При этом, можно найти много примеров, когда $k_2 = rev(k_1)$ и, если, в этом случае, например, k_1 - палиндром, то $k_1 = k_2$. С другой стороны есть также много случаев, когда $k_1 = k_2 = k$, но k - не палиндром, например, $k = 91, 182, 192, 273, 283, 293, ...$

Ну, и конечно, есть множество примеров, когда $k_2 \neq rev(k_1)$. Все реверсивно-устойчивые последовательности вида $S_n = k \cdot P91$ для $1 \leq k \leq 909$ приведены в следующем параграфе.

Программы и результаты, найденные на компьютере

```
# генерация P91 (не менее 2 нулей и не менее 2 единиц подряд)
function getpal(n)
  function ok(s)
    k0 = 0; k1 = 0; one = true
    for i in 1:length(s)
      if one
         if s[i]=='1'
           k1+=1
         else
           if k1 < 2 return false end
           k1 = 0; k0 = 1; one = false
         end
      else
         if s[i]=='0'
           k0+=1
         else
           if k0 < 2 return false end
           k0 = 0; k1 = 1; one = true
         end
      end
    end
    true
  end
  res = Vector{BigInt}()
  for k in 1:n
    s = string(k,base=2)
    p0 = string(s,reverse(s))
    p1 = string(s,0,reverse(s))
    p2 = string(s,1,reverse(s))
    if ok(p0) push!(res,parse(BigInt,p0)) end
    if ok(p1) push!(res,parse(BigInt,p1)) end
    if ok(p2) push!(res,parse(BigInt,p2)) end
  end
  sort!(res)
end
```

```
# Генерация P91 умножением на 91
function getpal91(n)
  function ok(p)
    b = 91*p
    for x in digits(b)
      if x > 1 return false end
    end
    true
  end
  res = Vector{BigInt}()
  for k in 1:n
    s = string(k,base=2)
    p0 = parse(BigInt, string(s,reverse(s)))
    p1 = parse(BigInt, string(s,0,reverse(s)))
    p2 = parse(BigInt, string(s,1,reverse(s)))
    if ok(p0) push!(res,p0) end
    if ok(p1) push!(res,p1) end
    if ok(p2) push!(res,p2) end
  end
  sort!(res)
end
```

Вторая программа проще, но медленнее первой, результат одинаков.

Все реверсивно-устойчивые последовательности вида $S_n = k \cdot 91$, разобъем на две группы.

Для первой, кроме основного: $\frac{rev(k \cdot x)}{k \cdot x} = const \; \forall x \in P91$, пусть выполняется дополнительное условие $rev(k \cdot x) = rev(k) \cdot x \; \forall x \in P91$, а для второй оно не выполняется. Для первой группы, очевидно, $\frac{rev(k \cdot x)}{k \cdot x} = \frac{rev(k)}{k}$.

```
k, rev(k)//k,        { k * P91 }
1, 1//1, {11, 111, 1111, 11111, 110011, 111111, 1100011,...}
2, 1//1, {22, 222, 2222, 22222, 220022, 222222, 2200022,...}
3, 1//1, {33, 333, 3333, 33333, 330033, 333333, 3300033,...}
4, 1//1, {44, 444, 4444, 44444, 440044, 444444, 4400044,...}
5, 1//1, {55, 555, 5555, 55555, 550055, 555555, 5500055,...}
6, 1//1, {66, 666, 6666, 66666, 660066, 666666, 6600066,...}
7, 1//1, {77, 777, 7777, 77777, 770077, 777777, 7700077,...}
```

8, 1//1, {88, 888, 8888, 88888, 880088, 888888, 8800088,...}
9, 1//1, {99, 999, 9999, 99999, 990099, 999999, 9900099,...}
10, 1//10, {110, 1110, 11110, 111110, 1100110, 1111110,...}
11, 1//1, {121, 1221, 12221, 122221, 1210121, 1222221,...}
12, 7//4, {132, 1332, 13332, 133332, 1320132, 1333332,...}
13, 31//13, {143, 1443, 14443, 144443, 1430143, 1444443,...}
14, 41//14, {154, 1554, 15554, 155554, 1540154, 1555554,...}
15, 17//5, {165, 1665, 16665, 166665, 1650165, 1666665,...}
16, 61//16, {176, 1776, 17776, 177776, 1760176, 1777776,...}
17, 71//17, {187, 1887, 18887, 188887, 1870187, 1888887,...}
18, 9//2, {198, 1998, 19998, 199998, 1980198, 1999998,...}
20, 1//10, {220, 2220, 22220, 222220, 2200220, 2222220,...}
21, 4//7, {231, 2331, 23331, 233331, 2310231, 2333331,...}
22, 1//1, {242, 2442, 24442, 244442, 2420242, 2444442,...}
23, 32//23, {253, 2553, 25553, 255553, 2530253, 2555553,...}
24, 7//4, {264, 2664, 26664, 266664, 2640264, 2666664,...}
25, 52//25, {275, 2775, 27775, 277775, 2750275, 2777775,...}
26, 31//13, {286, 2886, 28886, 288886, 2860286, 2888886,...}
27, 8//3, {297, 2997, 29997, 299997, 2970297, 2999997,...}
30, 1//10, {330, 3330, 33330, 333330, 3300330, 3333330,...}
31, 13//31, {341, 3441, 34441, 344441, 3410341, 3444441,...}
32, 23//32, {352, 3552, 35552, 355552, 3520352, 3555552,...}
33, 1//1, {363, 3663, 36663, 366663, 3630363, 3666663,...}
34, 43//34, {374, 3774, 37774, 377774, 3740374, 3777774,...}
35, 53//35, {385, 3885, 38885, 388885, 3850385, 3888885,...}
36, 7//4, {396, 3996, 39996, 399996, 3960396, 3999996,...}
40, 1//10, {440, 4440, 44440, 444440, 4400440, 4444440,...}
41, 14//41, {451, 4551, 45551, 455551, 4510451, 4555551,...}
42, 4//7, {462, 4662, 46662, 466662, 4620462, 4666662,...}
43, 34//43, {473, 4773, 47773, 477773, 4730473, 4777773,...}
44, 1//1, {484, 4884, 48884, 488884, 4840484, 4888884,...}
45, 6//5, {495, 4995, 49995, 499995, 4950495, 4999995,...}
50, 1//10, {550, 5550, 55550, 555550, 5500550, 5555550,...}
51, 5//17, {561, 5661, 56661, 566661, 5610561, 5666661,...}
52, 25//52, {572, 5772, 57772, 577772, 5720572, 5777772,...}
53, 35//53, {583, 5883, 58883, 588883, 5830583, 5888883,...}
54, 5//6, {594, 5994, 59994, 599994, 5940594, 5999994,...}
60, 1//10, {660, 6660, 66660, 666660, 6600660, 6666660,...}

61, 16//61, {671, 6771, 67771, 677771, 6710671, 6777771,...}
62, 13//31, {682, 6882, 68882, 688882, 6820682, 6888882,...}
63, 4//7, {693, 6993, 69993, 699993, 6930693, 6999993,...}
70, 1//10, {770, 7770, 77770, 777770, 7700770, 7777770,...}
71, 17//71, {781, 7881, 78881, 788881, 7810781, 7888881,...}
72, 3//8, {792, 7992, 79992, 799992, 7920792, 7999992,...}
80, 1//10, {880, 8880, 88880, 888880, 8800880, 8888880,...}
81, 2//9, {891, 8991, 89991, 899991, 8910891, 8999991,...}
90, 1//10, {990, 9990, 99990, 999990, 9900990, 9999990,...}
100, 1//100, {1100, 11100, 111100, 1111100, 11001100, 11111100,...}
101, 1//1, {1111, 11211, 112211, 1122211, 11111111, 11222211,...}
102, 67//34, {1122, 11322, 113322, 1133322, 11221122, 11333322,...}
103, 301//103, {1133, 11433, 114433, 1144433, 11331133, 11444433,...}
104, 401//104, {1144, 11544, 115544, 1155544, 11441144, 11555544,...}
105, 167//35, {1155, 11655, 116655, 1166655, 11551155, 11666655,...}
106, 601//106, {1166, 11766, 117766, 1177766, 11661166, 11777766,...}
107, 701//107, {1177, 11877, 118877, 1188877, 11771177, 11888877,...}
108, 89//12, {1188, 11988, 119988, 1199988, 11881188, 11999988,...}
110, 1//10, {1210, 12210, 122210, 1222210, 12101210, 12222210,...}
111, 1//1, {1221, 12321, 123321, 1233321, 12211221, 12333321,...}
112, 211//112, {1232, 12432, 124432, 1244432, 12321232, 12444432,...}
113, 311//113, {1243, 12543, 125543, 1255543, 12431243, 12555543,...}
114, 137//38, {1254, 12654, 126654, 1266654, 12541254, 12666654,...}
115, 511//115, {1265, 12765, 127765, 1277765, 12651265, 12777765,...}
116, 611//116, {1276, 12876, 128876, 1288876, 12761276, 12888876,...}
117, 79//13, {1287, 12987, 129987, 1299987, 12871287, 12999987,...}
120, 7//40, {1320, 13320, 133320, 1333320, 13201320, 13333320,...}
121, 1//1, {1331, 13431, 134431, 1344431, 13311331, 13444431,...}
122, 221//122, {1342, 13542, 135542, 1355542, 13421342, 13555542,...}
123, 107//41, {1353, 13653, 136653, 1366653, 13531353, 13666653,...}
124, 421//124, {1364, 13764, 137764, 1377764, 13641364, 13777764,...}
125, 521//125, {1375, 13875, 138875, 1388875, 13751375, 13888875,...}
126, 69//14, {1386, 13986, 139986, 1399986, 13861386, 13999986,...}
130, 31//130, {1430, 14430, 144430, 1444430, 14301430, 14444430,...}
131, 1//1, {1441, 14541, 145541, 1455541, 14411441, 14555541,...}
132, 7//4, {1452, 14652, 146652, 1466652, 14521452, 14666652,...}
133, 331//133, {1463, 14763, 147763, 1477763, 14631463, 14777763,...}
134, 431//134, {1474, 14874, 148874, 1488874, 14741474, 14888874,...}

135, 59//15, {1485, 14985, 149985, 1499985, 14851485, 14999985,...}
140, 41//140, {1540, 15540, 155540, 1555540, 15401540, 15555540,...}
141, 1//1, {1551, 15651, 156651, 1566651, 15511551, 15666651,...}
142, 241//142, {1562, 15762, 157762, 1577762, 15621562, 15777762,...}
143, 31//13, {1573, 15873, 158873, 1588873, 15731573, 15888873,...}
144, 49//16, {1584, 15984, 159984, 1599984, 15841584, 15999984,...}
150, 17//50, {1650, 16650, 166650, 1666650, 16501650, 16666650,...}
151, 1//1, {1661, 16761, 167761, 1677761, 16611661, 16777761,...}
152, 251//152, {1672, 16872, 168872, 1688872, 16721672, 16888872,...}
153, 39//17, {1683, 16983, 169983, 1699983, 16831683, 16999983,...}
160, 61//160, {1760, 17760, 177760, 1777760, 17601760, 17777760,...}
161, 1//1, {1771, 17871, 178871, 1788871, 17711771, 17888871,...}
162, 29//18, {1782, 17982, 179982, 1799982, 17821782, 17999982,...}
170, 71//170, {1870, 18870, 188870, 1888870, 18701870, 18888870,...}
171, 1//1, {1881, 18981, 189981, 1899981, 18811881, 18999981,...}
180, 9//20, {1980, 19980, 199980, 1999980, 19801980, 19999980,...}
200, 1//100, {2200, 22200, 222200, 2222200, 22002200, 22222200,...}
201, 34//67, {2211, 22311, 223311, 2233311, 22112211, 22333311,...}
202, 1//1, {2222, 22422, 224422, 2244422, 22222222, 22444422,...}
203, 302//203, {2233, 22533, 225533, 2255533, 22332233, 22555533,...}
204, 67//34, {2244, 22644, 226644, 2266644, 22442244, 22666644,...}
205, 502//205, {2255, 22755, 227755, 2277755, 22552255, 22777755,...}
206, 301//103, {2266, 22866, 228866, 2288866, 22662266, 22888866,...}
207, 78//23, {2277, 22977, 229977, 2299977, 22772277, 22999977,...}
210, 2//35, {2310, 23310, 233310, 2333310, 23102310, 23333310,...}
211, 112//211, {2321, 23421, 234421, 2344421, 23212321, 23444421,...}
212, 1//1, {2332, 23532, 235532, 2355532, 23322332, 23555532,...}
213, 104//71, {2343, 23643, 236643, 2366643, 23432343, 23666643,...}
214, 206//107, {2354, 23754, 237754, 2377754, 23542354, 23777754,...}
215, 512//215, {2365, 23865, 238865, 2388865, 23652365, 23888865,...}
216, 17//6, {2376, 23976, 239976, 2399976, 23762376, 23999976,...}
220, 1//10, {2420, 24420, 244420, 2444420, 24202420, 24444420,...}
221, 122//221, {2431, 24531, 245531, 2455531, 24312431, 24555531,...}
222, 1//1, {2442, 24642, 246642, 2466642, 24422442, 24666642,...}
223, 322//223, {2453, 24753, 247753, 2477753, 24532453, 24777753,...}
224, 211//112, {2464, 24864, 248864, 2488864, 24642464, 24888864,...}
225, 58//25, {2475, 24975, 249975, 2499975, 24752475, 24999975,...}
230, 16//115, {2530, 25530, 255530, 2555530, 25302530, 25555530,...}

231, 4//7, {2541, 25641, 256641, 2566641, 25412541, 25666641,...}
232, 1//1, {2552, 25752, 257752, 2577752, 25522552, 25777752,...}
233, 332//233, {2563, 25863, 258863, 2588863, 25632563, 25888863,...}
234, 24//13, {2574, 25974, 259974, 2599974, 25742574, 25999974,...}
240, 7//40, {2640, 26640, 266640, 2666640, 26402640, 26666640,...}
241, 142//241, {2651, 26751, 267751, 2677751, 26512651, 26777751,...}
242, 1//1, {2662, 26862, 268862, 2688862, 26622662, 26888862,...}
243, 38//27, {2673, 26973, 269973, 2699973, 26732673, 26999973,...}
250, 26//125, {2750, 27750, 277750, 2777750, 27502750, 27777750,...}
251, 152//251, {2761, 27861, 278861, 2788861, 27612761, 27888861,...}
252, 1//1, {2772, 27972, 279972, 2799972, 27722772, 27999972,...}
260, 31//130, {2860, 28860, 288860, 2888860, 28602860, 28888860,...}
261, 18//29, {2871, 28971, 289971, 2899971, 28712871, 28999971,...}
270, 4//15, {2970, 29970, 299970, 2999970, 29702970, 29999970,...}
300, 1//100, {3300, 33300, 333300, 3333300, 33003300, 33333300,...}
301, 103//301, {3311, 33411, 334411, 3344411, 33113311, 33444411,...}
302, 203//302, {3322, 33522, 335522, 3355522, 33223322, 33555522,...}
303, 1//1, {3333, 33633, 336633, 3366633, 33333333, 33666633,...}
304, 403//304, {3344, 33744, 337744, 3377744, 33443344, 33777744,...}
305, 503//305, {3355, 33855, 338855, 3388855, 33553355, 33888855,...}
306, 67//34, {3366, 33966, 339966, 3399966, 33663366, 33999966,...}
310, 13//310, {3410, 34410, 344410, 3444410, 34103410, 34444410,...}
311, 113//311, {3421, 34521, 345521, 3455521, 34213421, 34555521,...}
312, 71//104, {3432, 34632, 346632, 3466632, 34323432, 34666632,...}
313, 1//1, {3443, 34743, 347743, 3477743, 34433443, 34777743,...}
314, 413//314, {3454, 34854, 348854, 3488854, 34543454, 34888854,...}
315, 57//35, {3465, 34965, 349965, 3499965, 34653465, 34999965,...}
320, 23//320, {3520, 35520, 355520, 3555520, 35203520, 35555520,...}
321, 41//107, {3531, 35631, 356631, 3566631, 35313531, 35666631,...}
322, 223//322, {3542, 35742, 357742, 3577742, 35423542, 35777742,...}
323, 1//1, {3553, 35853, 358853, 3588853, 35533553, 35888853,...}
324, 47//36, {3564, 35964, 359964, 3599964, 35643564, 35999964,...}
330, 1//10, {3630, 36630, 366630, 3666630, 36303630, 36666630,...}
331, 133//331, {3641, 36741, 367741, 3677741, 36413641, 36777741,...}
332, 233//332, {3652, 36852, 368852, 3688852, 36523652, 36888852,...}
333, 1//1, {3663, 36963, 369963, 3699963, 36633663, 36999963,...}
340, 43//340, {3740, 37740, 377740, 3777740, 37403740, 37777740,...}
341, 13//31, {3751, 37851, 378851, 3788851, 37513751, 37888851,...}

342, 27//38, {3762, 37962, 379962, 3799962, 37623762, 37999962,...}
350, 53//350, {3850, 38850, 388850, 3888850, 38503850, 38888850,...}
351, 17//39, {3861, 38961, 389961, 3899961, 38613861, 38999961,...}
360, 7//40, {3960, 39960, 399960, 3999960, 39603960, 39999960,...}
400, 1//100, {4400, 44400, 444400, 4444400, 44004400, 44444400,...}
401, 104//401, {4411, 44511, 445511, 4455511, 44114411, 44555511,...}
402, 34//67, {4422, 44622, 446622, 4466622, 44224422, 44666622,...}
403, 304//403, {4433, 44733, 447733, 4477733, 44334433, 44777733,...}
404, 1//1, {4444, 44844, 448844, 4488844, 44444444, 44888844,...}
405, 56//45, {4455, 44955, 449955, 4499955, 44554455, 44999955,...}
410, 7//205, {4510, 45510, 455510, 4555510, 45104510, 45555510,...}
411, 38//137, {4521, 45621, 456621, 4566621, 45214521, 45666621,...}
412, 107//206, {4532, 45732, 457732, 4577732, 45324532, 45777732,...}
413, 314//413, {4543, 45843, 458843, 4588843, 45434543, 45888843,...}
414, 1//1, {4554, 45954, 459954, 4599954, 45544554, 45999954,...}
420, 2//35, {4620, 46620, 466620, 4666620, 46204620, 46666620,...}
421, 124//421, {4631, 46731, 467731, 4677731, 46314631, 46777731,...}
422, 112//211, {4642, 46842, 468842, 4688842, 46424642, 46888842,...}
423, 36//47, {4653, 46953, 469953, 4699953, 46534653, 46999953,...}
430, 17//215, {4730, 47730, 477730, 4777730, 47304730, 47777730,...}
431, 134//431, {4741, 47841, 478841, 4788841, 47414741, 47888841,...}
432, 13//24, {4752, 47952, 479952, 4799952, 47524752, 47999952,...}
440, 1//10, {4840, 48840, 488840, 4888840, 48404840, 48888840,...}
441, 16//49, {4851, 48951, 489951, 4899951, 48514851, 48999951,...}
450, 3//25, {4950, 49950, 499950, 4999950, 49504950, 49999950,...}
500, 1//100, {5500, 55500, 555500, 5555500, 55005500, 55555500,...}
501, 35//167, {5511, 55611, 556611, 5566611, 55115511, 55666611,...}
502, 205//502, {5522, 55722, 557722, 5577722, 55225522, 55777722,...}
503, 305//503, {5533, 55833, 558833, 5588833, 55335533, 55888833,...}
504, 45//56, {5544, 55944, 559944, 5599944, 55445544, 55999944,...}
510, 1//34, {5610, 56610, 566610, 5666610, 56105610, 56666610,...}
511, 115//511, {5621, 56721, 567721, 5677721, 56215621, 56777721,...}
512, 215//512, {5632, 56832, 568832, 5688832, 56325632, 56888832,...}
513, 35//57, {5643, 56943, 569943, 5699943, 56435643, 56999943,...}
520, 5//104, {5720, 57720, 577720, 5777720, 57205720, 57777720,...}
521, 125//521, {5731, 57831, 578831, 5788831, 57315731, 57888831,...}
522, 25//58, {5742, 57942, 579942, 5799942, 57425742, 57999942,...}
530, 7//106, {5830, 58830, 588830, 5888830, 58305830, 58888830,...}

```
531, 15//59, {5841, 58941, 589941, 5899941, 58415841, 58999941,...}
540, 1//12, {5940, 59940, 599940, 5999940, 59405940, 59999940,...}
600, 1//100, {6600, 66600, 666600, 6666600, 66006600, 66666600,...}
601, 106//601, {6611, 66711, 667711, 6677711, 66116611, 66777711,...}
602, 103//301, {6622, 66822, 668822, 6688822, 66226622, 66888822,...}
603, 34//67, {6633, 66933, 669933, 6699933, 66336633, 66999933,...}
610, 8//305, {6710, 67710, 677710, 6777710, 67106710, 67777710,...}
611, 116//611, {6721, 67821, 678821, 6788821, 67216721, 67888821,...}
612, 6//17, {6732, 67932, 679932, 6799932, 67326732, 67999932,...}
620, 13//310, {6820, 68820, 688820, 6888820, 68206820, 68888820,...}
621, 14//69, {6831, 68931, 689931, 6899931, 68316831, 68999931,...}
630, 2//35, {6930, 69930, 699930, 6999930, 69306930, 69999930,...}
700, 1//100, {7700, 77700, 777700, 7777700, 77007700, 77777700,...}
701, 107//701, {7711, 77811, 778811, 7788811, 77117711, 77888811,...}
702, 23//78, {7722, 77922, 779922, 7799922, 77227722, 77999922,...}
710, 17//710, {7810, 78810, 788810, 7888810, 78107810, 78888810,...}
711, 13//79, {7821, 78921, 789921, 7899921, 78217821, 78999921,...}
720, 3//80, {7920, 79920, 799920, 7999920, 79207920, 79999920,...}
800, 1//100, {8800, 88800, 888800, 8888800, 88008800, 88888800,...}
801, 12//89, {8811, 88911, 889911, 8899911, 88118811, 88999911,...}
810, 1//45, {8910, 89910, 899910, 8999910, 89108910, 89999910,...}
900, 1//100, {9900, 99900, 999900, 9999900, 99009900, 99999900,...}
```

Здесь приведены все реверсивно-устойчивые последовательности первой группы для $1 \le k \le 909$. Аналогичная таблица реверсивно-устойчивых последовательностей второй группы для тех же k:

```
k, rev(kx)//kx,        { k * P91 }
91, 1//1, {1001, 10101, 101101, 1011101, 10011001, 10111101,...}
92, 191//92, {1012, 10212, 102212, 1022212, 10121012, 10222212,...}
93, 97//31, {1023, 10323, 103323, 1033323, 10231023, 10333323,...}
94, 391//94, {1034, 10434, 104434, 1044434, 10341034, 10444434,...}
95, 491//95, {1045, 10545, 105545, 1055545, 10451045, 10555545,...}
96, 197//32, {1056, 10656, 106656, 1066656, 10561056, 10666656,...}
97, 691//97, {1067, 10767, 107767, 1077767, 10671067, 10777767,...}
98, 113//14, {1078, 10878, 108878, 1088878, 10781078, 10888878,...}
99, 9//1, {1089, 10989, 109989, 1099989, 10891089, 10999989,...}
182, 1//1, {2002, 20202, 202202, 2022202, 20022002, 20222202,...}
```

183, 94//61, {2013, 20313, 203313, 2033313, 20132013, 20333313,...}
184, 191//92, {2024, 20424, 204424, 2044424, 20242024, 20444424,...}
185, 482//185, {2035, 20535, 205535, 2055535, 20352035, 20555535,...}
186, 97//31, {2046, 20646, 206646, 2066646, 20462046, 20666646,...}
187, 62//17, {2057, 20757, 207757, 2077757, 20572057, 20777757,...}
188, 391//94, {2068, 20868, 208868, 2088868, 20682068, 20888868,...}
189, 14//3, {2079, 20979, 209979, 2099979, 20792079, 20999979,...}
191, 92//191, {2101, 21201, 212201, 2122201, 21012101, 21222201,...}
192, 1//1, {2112, 21312, 213312, 2133312, 21122112, 21333312,...}
193, 292//193, {2123, 21423, 214423, 2144423, 21232123, 21444423,...}
194, 196//97, {2134, 21534, 215534, 2155534, 21342134, 21555534,...}
195, 164//65, {2145, 21645, 216645, 2166645, 21452145, 21666645,...}
196, 148//49, {2156, 21756, 217756, 2177756, 21562156, 21777756,...}
197, 692//197, {2167, 21867, 218867, 2188867, 21672167, 21888867,...}
198, 4//1, {2178, 21978, 219978, 2199978, 21782178, 21999978,...}
273, 1//1, {3003, 30303, 303303, 3033303, 30033003, 30333303,...}
274, 373//274, {3014, 30414, 304414, 3044414, 30143014, 30444414,...}
275, 43//25, {3025, 30525, 305525, 3055525, 30253025, 30555525,...}
276, 191//92, {3036, 30636, 306636, 3066636, 30363036, 30666636,...}
277, 673//277, {3047, 30747, 307747, 3077747, 30473047, 30777747,...}
278, 773//278, {3058, 30858, 308858, 3088858, 30583058, 30888858,...}
279, 97//31, {3069, 30969, 309969, 3099969, 30693069, 30999969,...}
282, 61//94, {3102, 31302, 313302, 3133302, 31023102, 31333302,...}
283, 1//1, {3113, 31413, 314413, 3144413, 31133113, 31444413,...}
284, 383//284, {3124, 31524, 315524, 3155524, 31243124, 31555524,...}
285, 161//95, {3135, 31635, 316635, 3166635, 31353135, 31666635,...}
286, 53//26, {3146, 31746, 317746, 3177746, 31463146, 31777746,...}
287, 683//287, {3157, 31857, 318857, 3188857, 31573157, 31888857,...}
288, 87//32, {3168, 31968, 319968, 3199968, 31683168, 31999968,...}
291, 31//97, {3201, 32301, 323301, 3233301, 32013201, 32333301,...}
292, 193//292, {3212, 32412, 324412, 3244412, 32123212, 32444412,...}
293, 1//1, {3223, 32523, 325523, 3255523, 32233223, 32555523,...}
294, 131//98, {3234, 32634, 326634, 3266634, 32343234, 32666634,...}
295, 493//295, {3245, 32745, 327745, 3277745, 32453245, 32777745,...}
296, 593//296, {3256, 32856, 328856, 3288856, 32563256, 32888856,...}
297, 7//3, {3267, 32967, 329967, 3299967, 32673267, 32999967,...}
364, 1//1, {4004, 40404, 404404, 4044404, 40044004, 40444404,...}
365, 464//365, {4015, 40515, 405515, 4055515, 40154015, 40555515,...}

366, 94//61, {4026, 40626, 406626, 4066626, 40264026, 40666626,...}
367, 664//367, {4037, 40737, 407737, 4077737, 40374037, 40777737,...}
368, 191//92, {4048, 40848, 408848, 4088848, 40484048, 40888848,...}
369, 96//41, {4059, 40959, 409959, 4099959, 40594059, 40999959,...}
373, 274//373, {4103, 41403, 414403, 4144403, 41034103, 41444403,...}
374, 1//1, {4114, 41514, 415514, 4155514, 41144114, 41555514,...}
375, 158//125, {4125, 41625, 416625, 4166625, 41254125, 41666625,...}
376, 287//188, {4136, 41736, 417736, 4177736, 41364136, 41777736,...}
377, 674//377, {4147, 41847, 418847, 4188847, 41474147, 41888847,...}
378, 43//21, {4158, 41958, 419958, 4199958, 41584158, 41999958,...}
382, 92//191, {4202, 42402, 424402, 4244402, 42024202, 42444402,...}
383, 284//383, {4213, 42513, 425513, 4255513, 42134213, 42555513,...}
384, 1//1, {4224, 42624, 426624, 4266624, 42244224, 42666624,...}
385, 44//35, {4235, 42735, 427735, 4277735, 42354235, 42777735,...}
386, 292//193, {4246, 42846, 428846, 4288846, 42464246, 42888846,...}
387, 76//43, {4257, 42957, 429957, 4299957, 42574257, 42999957,...}
391, 94//391, {4301, 43401, 434401, 4344401, 43014301, 43444401,...}
392, 97//196, {4312, 43512, 435512, 4355512, 43124312, 43555512,...}
393, 98//131, {4323, 43623, 436623, 4366623, 43234323, 43666623,...}
394, 1//1, {4334, 43734, 437734, 4377734, 43344334, 43777734,...}
395, 494//395, {4345, 43845, 438845, 4388845, 43454345, 43888845,...}
396, 3//2, {4356, 43956, 439956, 4399956, 43564356, 43999956,...}
455, 1//1, {5005, 50505, 505505, 5055505, 50055005, 50555505,...}
456, 185//152, {5016, 50616, 506616, 5066616, 50165016, 50666616,...}
457, 655//457, {5027, 50727, 507727, 5077727, 50275027, 50777727,...}
458, 755//458, {5038, 50838, 508838, 5088838, 50385038, 50888838,...}
459, 95//51, {5049, 50949, 509949, 5099949, 50495049, 50999949,...}
464, 365//464, {5104, 51504, 515504, 5155504, 51045104, 51555504,...}
465, 1//1, {5115, 51615, 516615, 5166615, 51155115, 51666615,...}
466, 565//466, {5126, 51726, 517726, 5177726, 51265126, 51777726,...}
467, 665//467, {5137, 51837, 518837, 5188837, 51375137, 51888837,...}
468, 85//52, {5148, 51948, 519948, 5199948, 51485148, 51999948,...}
473, 25//43, {5203, 52503, 525503, 5255503, 52035203, 52555503,...}
474, 125//158, {5214, 52614, 526614, 5266614, 52145214, 52666614,...}
475, 1//1, {5225, 52725, 527725, 5277725, 52255225, 52777725,...}
476, 575//476, {5236, 52836, 528836, 5288836, 52365236, 52888836,...}
477, 75//53, {5247, 52947, 529947, 5299947, 52475247, 52999947,...}
482, 185//482, {5302, 53502, 535502, 5355502, 53025302, 53555502,...}

483, 95//161, {5313, 53613, 536613, 5366613, 53135313, 53666613,...}
484, 35//44, {5324, 53724, 537724, 5377724, 53245324, 53777724,...}
485, 1//1, {5335, 53835, 538835, 5388835, 53355335, 53888835,...}
486, 65//54, {5346, 53946, 539946, 5399946, 53465346, 53999946,...}
491, 95//491, {5401, 54501, 545501, 5455501, 54015401, 54555501,...}
492, 65//164, {5412, 54612, 546612, 5466612, 54125412, 54666612,...}
493, 295//493, {5423, 54723, 547723, 5477723, 54235423, 54777723,...}
494, 395//494, {5434, 54834, 548834, 5488834, 54345434, 54888834,...}
495, 1//1, {5445, 54945, 549945, 5499945, 54455445, 54999945,...}
546, 1//1, {6006, 60606, 606606, 6066606, 60066006, 60666606,...}
547, 646//547, {6017, 60717, 607717, 6077717, 60176017, 60777717,...}
548, 373//274, {6028, 60828, 608828, 6088828, 60286028, 60888828,...}
549, 94//61, {6039, 60939, 609939, 6099939, 60396039, 60999939,...}
555, 152//185, {6105, 61605, 616605, 6166605, 61056105, 61666605,...}
556, 1//1, {6116, 61716, 617716, 6177716, 61166116, 61777716,...}
557, 656//557, {6127, 61827, 618827, 6188827, 61276127, 61888827,...}
558, 42//31, {6138, 61938, 619938, 6199938, 61386138, 61999938,...}
564, 61//94, {6204, 62604, 626604, 6266604, 62046204, 62666604,...}
565, 466//565, {6215, 62715, 627715, 6277715, 62156215, 62777715,...}
566, 1//1, {6226, 62826, 628826, 6288826, 62266226, 62888826,...}
567, 74//63, {6237, 62937, 629937, 6299937, 62376237, 62999937,...}
573, 92//191, {6303, 63603, 636603, 6366603, 63036303, 63666603,...}
574, 188//287, {6314, 63714, 637714, 6377714, 63146314, 63777714,...}
575, 476//575, {6325, 63825, 638825, 6388825, 63256325, 63888825,...}
576, 1//1, {6336, 63936, 639936, 6399936, 63366336, 63999936,...}
582, 31//97, {6402, 64602, 646602, 6466602, 64026402, 64666602,...}
583, 26//53, {6413, 64713, 647713, 6477713, 64136413, 64777713,...}
584, 193//292, {6424, 64824, 648824, 6488824, 64246424, 64888824,...}
585, 54//65, {6435, 64935, 649935, 6499935, 64356435, 64999935,...}
591, 32//197, {6501, 65601, 656601, 6566601, 65016501, 65666601,...}
592, 49//148, {6512, 65712, 657712, 6577712, 65126512, 65777712,...}
593, 296//593, {6523, 65823, 658823, 6588823, 65236523, 65888823,...}
594, 2//3, {6534, 65934, 659934, 6599934, 65346534, 65999934,...}
637, 1//1, {7007, 70707, 707707, 7077707, 70077007, 70777707,...}
638, 67//58, {7018, 70818, 708818, 7088818, 70187018, 70888818,...}
639, 93//71, {7029, 70929, 709929, 7099929, 70297029, 70999929,...}
646, 547//646, {7106, 71706, 717706, 7177706, 71067106, 71777706,...}
647, 1//1, {7117, 71817, 718817, 7188817, 71177117, 71888817,...}

648, 83//72, {7128, 71928, 719928, 7199928, 71287128, 71999928,...}
655, 457//655, {7205, 72705, 727705, 7277705, 72057205, 72777705,...}
656, 557//656, {7216, 72816, 728816, 7288816, 72167216, 72888816,...}
657, 1//1, {7227, 72927, 729927, 7299927, 72277227, 72999927,...}
664, 367//664, {7304, 73704, 737704, 7377704, 73047304, 73777704,...}
665, 467//665, {7315, 73815, 738815, 7388815, 73157315, 73888815,...}
666, 63//74, {7326, 73926, 739926, 7399926, 73267326, 73999926,...}
673, 277//673, {7403, 74703, 747703, 7477703, 74037403, 74777703,...}
674, 377//674, {7414, 74814, 748814, 7488814, 74147414, 74888814,...}
675, 53//75, {7425, 74925, 749925, 7499925, 74257425, 74999925,...}
682, 17//62, {7502, 75702, 757702, 7577702, 75027502, 75777702,...}
683, 287//683, {7513, 75813, 758813, 7588813, 75137513, 75888813,...}
684, 43//76, {7524, 75924, 759924, 7599924, 75247524, 75999924,...}
691, 97//691, {7601, 76701, 767701, 7677701, 76017601, 76777701,...}
692, 197//692, {7612, 76812, 768812, 7688812, 76127612, 76888812,...}
693, 3//7, {7623, 76923, 769923, 7699923, 76237623, 76999923,...}
728, 1//1, {8008, 80808, 808808, 8088808, 80088008, 80888808,...}
729, 92//81, {8019, 80919, 809919, 8099919, 80198019, 80999919,...}
737, 58//67, {8107, 81807, 818807, 8188807, 81078107, 81888807,...}
738, 1//1, {8118, 81918, 819918, 8199918, 81188118, 81999918,...}
746, 274//373, {8206, 82806, 828806, 8288806, 82068206, 82888806,...}
747, 72//83, {8217, 82917, 829917, 8299917, 82178217, 82999917,...}
755, 458//755, {8305, 83805, 838805, 8388805, 83058305, 83888805,...}
756, 31//42, {8316, 83916, 839916, 8399916, 83168316, 83999916,...}
764, 92//191, {8404, 84804, 848804, 8488804, 84048404, 84888804,...}
765, 52//85, {8415, 84915, 849915, 8499915, 84158415, 84999915,...}
773, 278//773, {8503, 85803, 858803, 8588803, 85038503, 85888803,...}
774, 21//43, {8514, 85914, 859914, 8599914, 85148514, 85999914,...}
782, 94//391, {8602, 86802, 868802, 8688802, 86028602, 86888802,...}
783, 32//87, {8613, 86913, 869913, 8699913, 86138613, 86999913,...}
791, 14//113, {8701, 87801, 878801, 8788801, 87018701, 87888801,...}
792, 1//4, {8712, 87912, 879912, 8799912, 87128712, 87999912,...}
819, 1//1, {9009, 90909, 909909, 9099909, 90099009, 90999909,...}
828, 81//92, {9108, 91908, 919908, 9199908, 91089108, 91999908,...}
837, 71//93, {9207, 92907, 929907, 9299907, 92079207, 92999907,...}
846, 61//94, {9306, 93906, 939906, 9399906, 93069306, 93999906,...}
855, 51//95, {9405, 94905, 949905, 9499905, 94059405, 94999905,...}
864, 41//96, {9504, 95904, 959904, 9599904, 95049504, 95999904,...}

```
873, 31//97, {9603, 96903, 969903, 9699903, 96039603, 96999903,...}
882, 3//14, {9702, 97902, 979902, 9799902, 97029702, 97999902,...}
891, 1//9, {9801, 98901, 989901, 9899901, 98019801, 98999901,...}
```

В первой таблице, если k - палиндром, то $\frac{rev(k \cdot x)}{k \cdot x} = \frac{rev(k)}{k} = 1$ и сама последовательность состоит из палиндромов. Во второй же, в последовательности могут быть все палиндромы, даже если k - не палиндром.

Все $k \in [1, 909]$, для которых $d(k \cdot P91) = k \cdot P91$:

```
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, 44, 91, 99, 101, 111, 121,
131, 141, 151, 161, 171, 182, 192, 198, 202, 212, 222, 232, 242,
252, 273, 283, 293, 303, 313, 323, 333, 364, 374, 384, 394, 404,
414, 455, 465, 475, 485, 495, 546, 556, 566, 576, 637, 647, 657,
728, 738, 819
```

При всех этих k, кроме двух: 99 и 198 (у них $rev(k \cdot x)$ нацело делится на $k \cdot x$), последовательности состоят из чисел-палиндромов. Очень много случаев, когда $d(k \cdot P91) = P91$. Приведем все такие $k \in [1, 909]$:

```
1, 10, 13, 14, 16, 17, 23, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 43, 52, 53, 61,
71, 92, 94, 95, 97, 100, 103, 104, 106, 107, 112, 113, 115, 116,
122, 124, 125, 130, 133, 134, 140, 142, 152, 160, 170, 185, 191,
193, 197, 203, 205, 211, 215, 221, 223, 233, 241, 251, 274, 277,
278, 284, 287, 292, 295, 296, 301, 302, 304, 305, 310, 311, 314,
320, 322, 331, 332, 340, 350, 365, 367, 373, 377, 383, 391, 395,
401, 403, 413, 421, 431, 457, 458, 464, 466, 467, 476, 482, 491,
493, 494, 502, 503, 511, 512, 521, 547, 557, 565, 575, 593, 601,
611, 646, 655, 656, 664, 665, 673, 674, 683, 691, 692, 701, 710,
755, 773
```

И в заключение, добавим еще некоторые интересные наблюдения:

```
d(k*P91) = 2*P91 => k: 2, 20, 26, 62, 184, 188, 194, 200, 206, 214,
                       224, 230, 250, 260, 376, 382, 386, 392, 410,
                       412, 422, 430, 548, 574, 584, 602, 610, 620,
                       746, 782
d(k*P91) = 3*P91 => k: 3, 12, 15, 21, 30, 51, 93, 96, 102, 105, 114,
```

```
                       120, 123, 150, 183, 195, 201, 213, 276, 282,
                       285, 291, 294, 300, 312, 321, 375, 393, 411,
                       456, 474, 483, 492, 501, 555, 573, 591
d(k*P91) = 4*P91 => k: 4, 40, 196, 368, 400, 592, 764
d(k*P91) = 5*P91 => k: 5, 50, 500, 520, 530
d(k*P91) = 6*P91 => k: 6, 24, 42, 60, 186, 204, 210, 240, 366, 402,
                       564, 582, 600
d(k*P91) = 7*P91 => k: 7, 70, 98, 700, 791
d(k*P91) = 8*P91 => k: 8, 80, 800
d(k*P91) = 9*P91 => k: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 108,
                       117, 126, 135, 144, 153, 162, 180, 207, 225,
                       243, 261, 279, 288, 306, 315, 324, 342, 351,
                       360, 369, 387, 405, 423, 441, 459, 468, 477,
                       486, 504, 513, 522, 531, 549, 567, 585, 603,
                       621, 639, 648, 666, 675, 684, 702, 711, 720,
                       729, 747, 765, 783, 801, 828, 837, 846, 855,
                       864, 873, 900
d(k*P91) = 11*P91 => k: 11, 110, 143, 187, 275, 286, 341, 385, 473,
                        484, 583, 638, 682, 737
d(k*P91) = 22*P91 => k: 22, 220
d(k*P91) = 33*P91 => k: 33, 132, 231, 330
```

Ссылки

[1] https://oeis.org/A061851

[2] R. Webster and G. Williams, On the Trail of Reverse Divisors: 1089 and All that Follow, Mathematical Spectrum, 45 (2012/2013), 96–102.

[3] https://oeis.org/A008918

[4] Sloane, N. J. A. 2178 and all that [Электронный ресурс] / N. J. A. Sloane // The Fibonacci Quarterly. — 2014. — Vol. 52, no. 2. — P. 99–105. — https://www.fq.math.ca/Papers1/52-2/Sloan10242013.pdf

[5] Гуляев Г.М. Компьютер в помощь математике. Исследование и поиск, раздел 1 "Проблема 196 или числа Лишрела (07.12.2024), стр 1-7. —

http://soft.altailand.ru/pdf/%D0%9A%D0%BE%D0%BC%D0%BF%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%B5%D1%80_%D0%B2_%D0%BF%D0%BE%D0%BC%D0%BE%D1%89%D1%8C_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B5.pdf